**Задачи и его решения Финала физмат боев.**

**Высшая лига. Математика. 3.04.2022.**

1. Можно ли найти какие–нибудь пять различных натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары.

**Ответ**: можно например: 60, 63, 64, 66, 72. Другие примеры проверять.

1. В футбольном турнире, где каждая команда встречалась с каждой один раз, играли 16 команд. За победу давали три очка, за ничью ⎯ одно, за поражение ⎯ ноль. После окончания турнира выяснилось, что каждая команда выиграла хотя бы треть своих матчей и проиграла хотя бы треть своих матчей. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.

**Первое решение**. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. При этом 29 очков ни одна команда набрать не могла. В самом деле, пусть такая команда есть. Тогда она должна была хотя бы раз сыграть вничью. Но в этом случае у неё максимум 9 побед, и она набрала не более 3⋅9+1 = 28 очков, ибо любая замена победы ничьей уменьшает число очков. Таким образом, у нас 16 команд и 15 возможных сумм баллов: 15, …, 27, 28, 30, из чего и вытекает утверждение задачи.

**Второе решение**. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. Тут 16 вариантов, и если никакие две команды не набрали поровну очков, то каждое количество очков от 15 до 30 набрала ровно одна команда, а всего они набрали 15+…+30 = 360 очков. Но 360 — это максимальное возможное общее число очков, которое получается, если все 16⋅15/2 = 120 матчей турнира закончились чьей-либо победой. Однако, не все числа от 15 до 30 делятся на 3, поэтому в турнире были и ничьи, а тогда общая сумма очков должна быть меньше 360 — противоречие.

1. Приступая к игре с танками, Айаан посмотрел на часы. Был второй час дня. Потратив на игру ровно час, Айаан снова посмотрел на часы и заметил, что угол между часовыми и минутными стрелками остался прежним. Во сколько Айаан начал игру?

**Ответ.** В 1 час 82/11 мин или в 1 час 4010/11 мин.**Решение**. Пусть в момент, когда Петя посмотрел на часы, было *x* минут второго. Так как за минуту минутная стрелка проходит 6°, а часовая — 0,5°, то часовая стрелка в этот момент образовывала с направлением на 12 часов угол в 30° +0,5*x*°, а минутная — угол в 6*x*°. За час минутная стрелка совершила полный оборот и оказалась на прежнем месте, а часовая повернулась на 30°. Очевидно, минутная стрелка будет направлена вдоль прямой, делящей пополам угол между двумя положениями часовой стрелки. Значит, 6*x*° = ((30° +0,5*x*°) +(60° +0,5*x*°))/2, если минутная стрелка лежит внутри угла, образованного двумя положениями, часовой, либо 6*x*°–180° = ((30° +0,5*x*°) +(60° +0,5*x*°))/2, если нет. Решая эти два уравнения, получаем два указанных выше ответа.

1. За какое наименьшее число ходов можно перенести шахматного коня из левой нижней клетки в правую верхнюю клетку доски 9х9?

**Решение**: При шахматной раскраске конь с каждым ходом меняет цвет. Поэтому, он должен сделать четное количество ходов. За 4 хода он может достигнуть 9-й горизонтали (или вертикали), но тогда пройдет только 4 вертикали и не достигнет угла. За 6 ходов примеров много.

1. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Точка P такова, что DOCP — тоже параллелограмм (CD — его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R ⎯ точку пересечения DQ и CP. Докажите, что PC = CR.

**Решение**. Заметим, что отрезки *ВО* и *РC* параллельны и равны. Поэтому *BOPC* ⎯ параллелограмм, откуда *QC* = *OC*/2 = *PD*/2. Таким образом, отрезок *QC* с концами на сторонах *RD* и *RP* треугольника *DRP* параллелен стороне *DP* этого треугольника и равен её половине. Значит, он является средней линией этого треугольника (иначе он вместе со средней линией образовывал бы параллелограмм, что невозможно, так как прямые *RD* и *RP* не параллельны). Следовательно, *C* ⎯ середина отрезка *RP*, что и требовалось доказать.

**Задачи и его решения Финала физмат боев.**

**Первая лига. Математика. 3.04.2022.**

1. Диагональ делит четырехугольник с периметром 31 см на два треугольника с периметрами 21 см и 30 см. Чему равна длина этой диагонали?

**Решение**: Сумма периметров двух треугольников равна сумме периметра четырехугольника и удвоенной диагонали. Т.е. 21+30=30+2d, откуда d=10

1. За какое наименьшее число ходов можно перенести шахматного коня из левой нижней клетки в правую верхнюю клетку доски 9х9?

**Решение**: При шахматной раскраске конь с каждым ходом меняет цвет. Поэтому, он должен сделать четное количество ходов. За 4 хода он может достигнуть 9-й горизонтали (или вертикали), но тогда пройдет только 4 вертикали и не достигнет угла. За 6 ходов примеров много.

1. Представьте число 2022 в виде сумму трех слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

**Решение:** Заметим, что 2022 делится на 6. Тогда если возьмем числа А, 2А и 3А, условие выполнится. Ответ 337+674+1011=2022

1. Можно ли найти какие – нибудь пять различных натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары.

**Решение:** Можно. Например 60, 63, 64, 66, 72

1. В футбольном турнире, где каждая команда встречалась с каждой один раз, играли 16 команд. За победу давали три очка, за ничью ⎯ одно, за поражение ⎯ ноль. После окончания турнира выяснилось, что каждая команда выиграла хотя бы треть своих матчей и проиграла хотя бы треть своих матчей. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.

**Первое решение**. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. При этом 29 очков ни одна команда набрать не могла. В самом деле, пусть такая команда есть. Тогда она должна была хотя бы раз сыграть вничью. Но в этом случае у неё максимум 9 побед, и она набрала не более 3⋅9+1 = 28 очков, ибо любая замена победы ничьей уменьшает число очков. Таким образом, у нас 16 команд и 15 возможных сумм баллов: 15, …, 27, 28, 30, из чего и вытекает утверждение задачи.

**Второе решение.** Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. Тут 16 вариантов, и если никакие две команды не набрали поровну очков, то каждое количество очков от 15 до 30 набрала ровно одна команда, а всего они набрали 15+…+30 = 360 очков. Но 360 — это максимальное возможное общее число очков, которое получается, если все 16⋅15/2 = 120 матчей турнира закончились чьей-либо победой. Однако, не все числа от 15 до 30 делятся на 3, поэтому в турнире были и ничьи, а тогда общая сумма очков должна быть меньше 360 — противоречие.

**Задачи и его решения Финала физмат боев.**

**Вторая лига. Математика. 3.04.2022.**

1. Квадрат разрезан на прямоугольники равной площади так, как показано на рисунке. Найдите площадь квадрата, если отрезок AB равен 1.

**Решение:** Площади прямоугольников снизу и сверху АВ равны, значит А середина отрезка, на котором лежит. Тогда верхние стороны прямоугольников равны по 0,5. Т.е. сторона квадрата 0,5+0,5+1=2 и площадь равна 4.

1. Айаал, Антон и Айсен решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

**Решение**:

 - легкие



Умножим на 2 четвертое уравнение:



Складываем первые три уравнения:



Вычитаем:



1. Диагональ делит четырехугольник с периметром 31 см на два треугольника с периметрами 21 см и 30 см. Чему равна длина этой диагонали?

**Решение**: Сумма периметров двух треугольников равна сумме периметра четырехугольника и удвоенной диагонали. Т.е. 21+30=30+2d, откуда d=10

1. За какое наименьшее число ходов можно перенести шахматного коня из левой нижней клетки в правую верхнюю клетку доски 9х9?

**Решение**: При шахматной раскраске конь с каждым ходом меняет цвет. Поэтому, он должен сделать четное количество ходов. За 4 хода он может достигнуть 9-й горизонтали (или вертикали), но тогда пройдет только 4 вертикали и не достигнет угла. За 6 ходов примеров много.

1. Представьте число 2022 в виде сумму трехслагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

**Решение:** Заметим, что 2022 делится на 6. Тогда если возьмем числа А, 2А и 3А, условие выполнится. Ответ 337+674+1011=2022